第二次习题课

2022 年 9 月 15 日

1 简要回顾

* 内积空间定义：
（1）<x,x> $\geq$ 0,<x,x>=0 当且仅当 x=0(正定性）
（2）<x,y>=<y,x> (对称性）
（3）<x1+x2,y>=<x1,y>+<x2,y>,<λx,y>=λ<x,y>,$\lambda \in R$(线性性）
* 赋范空间定义：
（1）$\left\|x\right\| \geq 0$,$\left\|x\right\| = 0$ 当且仅当 x=0(正定性）
（2）$\left\|\lambda x\right\|$=$|\lambda|\left\|x\right\|$ $\lambda \in R$(齐次性)
（3）$\left\|x+y\right\| \leq \left\|x\right\| + \left\|y\right\|$(三角不等式）
* 度量空间定义
（1）$\rho(x,y) \geq 0$,$\rho(x,y) = 0$ 当且仅当 x=y(正定性）
（2）$\rho(x,y) = \rho(y,x)$(对称性）
（3）$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$(三角不等式)
* 内积空间 $\subseteq$ 赋范空间 $\subseteq$ 度量空间
* 完备：X 中所有柯西列收敛。
* 完备的赋范空间：Banach 空间
* 完备的内积空间：Hilbert 空间
* 赋范空间范数由内积诱导，当且仅当范数满足平行四边形法则
* 广义 Cauchy-Schwarg 定理 q(x,x)$\geq$ 0 且 q(x,x)=0, 当且仅当 x=0
则对任意 x,y 属于 X, 有
$|q(x,y)|^2 \leq q(x,x)q(y,y)$
等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关

2 作业参考解答

1.3
解：1. 正定性
$\forall x,y \in X$, $\rho(x,y) \geq 0$ 且 $\rho(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$
2. 对称性
$\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. 三角不等式
x=z 时显然
$x \neq z$ 时，若 $x \neq y$, 由正定性，$\rho(x,z) = 1 \leq 1+\rho(y,z) = \rho(x,y)+\rho(y,z)$；
若 x=y, 则 $\rho(x,z) = 1 \leq 0+1 = \rho(x,y)+\rho(y,z)$。
所以 $\forall x,y,z \in X$ 三角不等式成立。
得证 (X,ρ) 为度量空间。
1.5
证内积空间
1.(共轭) 双线性 2.(共轭）对称 3. 正定性（三条都需要验证）
下面证明完备性
设 $\{x^m\}$ 为 X 中的基本列，其中 $\{x^m\} = (x_1^m, x_2^m, ..., x_k^m, ...)$, 则
$\rho(x^{m+p}, x^m) \longrightarrow 0$ $(m \longrightarrow \infty, \forall p \in N)$
由此可以推出：$\forall k \in N$
$|x_k^{m+p} - x_k^m| \longrightarrow 0$ $(m \longrightarrow \infty, \forall p \in N)$
由实数的完备性，存在 x_k, 使得 $|x_k^m - x_k| \longrightarrow 0$ $(m \longrightarrow \infty)$
令 $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$
$M = \sup_n \sum_{i=0}^{\infty}(x_i^n)^2 + 1$
$\sum_{i=0}^{k} x_i^2 < M$
令 $k \longrightarrow \infty$ 可知 $x \in X$
$\forall \varepsilon, \exists M1, N$, 当 $n > N$ 时,$\sum_{i=m1}^{\infty}(x_i^n)^2 < \varepsilon$
$\forall \varepsilon, \exists M2$,$\sum_{i=m2}^{\infty}(x_i)^2 < \varepsilon$
取 m=maxM1,M2
$\sum_{i=m}^{\infty}(x_i^n - x_i)^2 < 2(\sum_{i=m}^{\infty}(x_i^n)^2 + \sum_{i=m}^{\infty}(x_i)^2) < 4\varepsilon$
k<m 部分显然
x^n 收敛于 X 中的 x
X 完备，是 Hilert 空间。
1.6
1. 与第五题类似
2.(1) 正定性，(2) 三角不等式，(3) 齐次性 (三条都要验证）
完备性与第五题类似
3. 证明为赋范空间
(1) 正定性 (2) 齐次性 (3) 三角不等式 (一一验证)
下证完备性
设 $\{x^m\}$ 为 R^n 中的基本列，其中 $\{x^m\} = (x_1^m, x_2^m, ..., x_n^m)$, 则
$\rho(x^{m+p}, x^m) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i^{m+p} - x_i^m| \longrightarrow 0$ $(m \longrightarrow \infty, \forall p \in N)$
由此可以推出：$\forall k \in 1...n$
$|x_k^{m+p} - x_k^m| \longrightarrow 0$ $(m \longrightarrow \infty, \forall p \in N)$
由实数的完备性，存在 x_k, 使得 $|x_k^m - x_k| \longrightarrow 0$ $(m \longrightarrow \infty)$
令 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, 固定 m
$\lim_{p\to\infty}\rho(x^{m+p}, x^m) = \lim_{p\to\infty}\max_{1\leq i\leq n}|x_i^{m+p} - x_i^m|$
$= \max_{1\leq i\leq n}|x_i - x_i^m| = \rho(x, x^m)$
令 $m \longrightarrow \infty$
得 x^m 收敛于 x
得原空间为 B 空间
1.8
1.2：(1) 正定 (2) 对称 (3) 三角不等式
3. 证内积空间
1.(共轭) 双线性 2.(共轭）对称 3. 正定性
由多项式函数无限维，且属于 X, 故 X 为无限维向量空间
Schwarz 不等式：
$|\int_a^b x(t)y(t)dt| \leq [\int_a^b x^2(t)dt]^{\frac{1}{2}}[\int_a^b y^2(t)dt]^{\frac{1}{2}}$
当且仅当存在 $\lambda \in R$,s.t.$y(t) = \lambda x(t)$ 时取等
(X,ρ) 不是完备度量空间
反例：

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad x \in [0, 1-\epsilon) \\ -\epsilon^-1x + \epsilon^-1 \quad x \in [1-\epsilon, 1+\epsilon) \\ -1 \quad x \in [1+\epsilon, 2) \end{cases}$$

其收敛到

$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad x \in [0, 1) \\ -1 \quad x \in [1, 2) \end{cases}$$

由于 X 为度量空间，所以极限唯一，故 f_n 没有连续极限。
1.11
1. 取 f=x,g=1-x, 有
$\left\|f+g\right\|^2 + \left\|f-g\right\|^2 = 1+1 = 2 \neq 4 = 2(\left\|f\right\|^2 + \left\|g\right\|^2)$
平行四边形法则不成立
2. 反证
设存在范数诱导出此度量
$\left\|x-y\right\| = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$
则 $\left\|2x\right\| = 1 \neq 2 = 2\left\|x\right\|$
与范数齐次性矛盾。